第 2 节 求无参函数的单调区间、极值、最值（★★）

强化训练

1.（2022・重庆模拟・★★）函数 $f(x)=x-\dfrac{6}{x}-5\ln x$ 的单调递减区间为（　　）

（A）$(0,2)$　　（B）$(2,3)$　　（C）$(1,3)$　　（D）$(3,+\infty)$

答案：B

解析：由题意，$f'(x)=1+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{5}{x}=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2}$，$x>0$，

所以 $f'(x)<0\Leftrightarrow 2<x<3$，故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(2,3)$.

2.（2023・天津模拟・★★）设函数 $f(x)=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$ 的极值.

解：由题意，$f'(x)=(2x+3)\mathrm{e}^x+(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x=(x^2+5x+4)\mathrm{e}^x=(x+1)(x+4)\mathrm{e}^x$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x<-4$ 或 $x>-1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow -4<x<-1$，

从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,-4)$ 上↗，在 $(-4,-1)$ 上↘，在 $(-1,+\infty)$ 上↗，

故 $f(x)$ 有极大值 $f(-4)=5\mathrm{e}^{-4}$，极小值 $f(-1)=-\mathrm{e}^{-1}$.

3.（2021・全国甲卷节选・★★）已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\dfrac{x^a}{a^x}(x>0)$，当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：当 $a=2$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}(x>0)$，所以 $f'(x)=\dfrac{2x\cdot 2^x-2^x\ln 2\cdot x^2}{(2^x)^2}=\dfrac{x(2-x\ln 2)}{2^x}$，

从而 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{2}{\ln 2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x>\dfrac{2}{\ln 2}$，

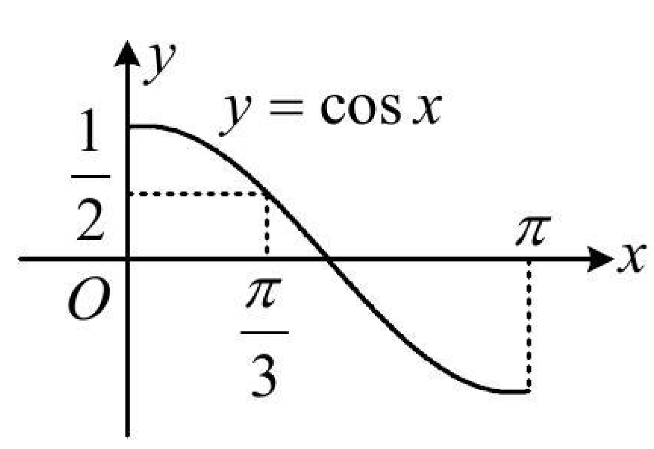
故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\dfrac{2}{\ln 2})$，单调递减区间是 $(\dfrac{2}{\ln 2},+\infty)$.

4.（2022・广东汕头三模・★★）已知函数 $f(x)=x-2\sin x$，求 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值.

解：由题意，$f'(x)=1-2\cos x$，（可画出 $y=\cos x$ 的图象来看 $f'(x)$ 的正负，如图）

所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\cos x>\dfrac{1}{2}$，从而 $f'(x)<0$；当 $\dfrac{\pi}{3}<x<\pi$ 时，$\cos x<\dfrac{1}{2}$，从而 $f'(x)>0$；

故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{\pi}{3},\pi)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 有极小值 $f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，无极大值.



5．（2022•河南郑州期末•★★★）已知函数 $f(x)=xe^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，求函数 $f(x)$ 的极值.

解：由题意，$f'(x)=(x+1)e^x-x-1=(x+1)(e^x-1)$，

（$f'(x)$ 的零点有 -1 和 0，它们把实数集划分成了三段，故分三段分别考虑 $f'(x)$ 的正负）

当 $x<-1$ 时，$x+1<0$，$e^x-1<0$，所以 $f'(x)>0$；

当 $-1<x<0$ 时，$x+1>0$，$e^x-1<0$，所以 $f'(x)<0$；

当 $x>0$ 时，$x+1>0$，$e^x-1>0$，所以 $f'(x)>0$；

从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$，极小值 $f(0)=-1$.

6．（2022•四川成都期末•★★★）已知函数 $f(x)=2x\ln x-\frac{1}{2}x^2-x+2$，求 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的最小值.

解：由题意，$f'(x)=2\ln x-x+1$，（此处 $f'(x)$ 不易直接判断正负，可二次求导）

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$，当 $x\in(0,2]$ 时，$g'(x)\ge 0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增，

又 $f'(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $1<x\le 2$ 时，$f'(x)>0$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的最小值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

7．（2022•天津模拟•★★★）已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+\ln x-x$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：由题意，$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{(x-1)(e^x-x)}{x^2}$，$x>0$，

（$x-1$ 和 x^2 的正负情况很明确，那 e^x-x 这部分呢？可构造函数分析）

设 $g(x)=e^x-x(x>0)$，则 $g'(x)=e^x-1>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0)=1>0$，所以 $g(x)>0$ 恒成立，从而 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1,+\infty)$，单调递减区间是 $(0,1)$.

8．（2023•全国甲卷节选•★★★）已知 $f(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 若 $a=8$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：若 $a=8$，则 $f(x)=8x-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$，

所以 $f'(x)=8-\frac{\cos x\cdot\cos^3 x-3\cos^2 x(-\sin x)\sin x}{\cos^6 x}=8-\frac{\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{8\cos^4 x-\cos^2 x-3\sin^2 x}{\cos^4 x}$，

（要判断正负，可将 $\sin^2 x$ 换成 $1-\cos^2 x$，统一函数名）

故 $f'(x)=\frac{8\cos^4 x-\cos^2 x-3(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}=\frac{8\cos^4 x+2\cos^2 x-3}{\cos^4 x}=\frac{(2\cos^2 x-1)(4\cos^2 x+3)}{\cos^4 x}$，

（此式的正负与 $2\cos^2 x-1$ 相同，故只需考虑它在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的正负，其零点为 $\frac{\pi}{4}$，故以 $\frac{\pi}{4}$ 为分界点讨论）

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1$，所以 $2\cos^2 x-1>0$，故 $f'(x)>0$，

当 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$0<\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $2\cos^2 x-1<0$，故 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上单调递减.